1 Spazi vettoriali

(1) Per ciascuno dei seguenti spazi dire se è o meno uno spazio vettoriale (spiegare)

(a) $\mathbb{R}^5$ [S]
(b) $[0, \infty)$ [N]
(c) $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 = 0\}$ [S]
(d) $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + 2x_2 = 0\}$ [N]
(e) $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > x_2\}$ [N]
(f) $\{A \in M_{n\times n} : a_{ij} \geq 0, \ \forall i, j\}$ [N]
(g) L'insieme di tutte le matrici $n \times n$ a coefficienti interi [N]
(h) L'insieme di tutte le matrici $n \times n$ diagonali [S]
(i) L'insieme dei polinomi [S]
(j) L'insieme dei polinomi di grado non superiore a 4 [S]
(k) L'insieme dei polinomi di grado non inferiore a 4 [N]
(l) L'insieme dei polinomi che si annullano in $x = 1$ [S]
(m) L'insieme dei polinomi p tali che $p(1) = 3$ [N]
(n) L'insieme dei polinomi p tali che $p(1)$ è un intero pari [N]
(o) $C^3(\mathbb{R})$, vale a dire l'insieme delle funzioni reali con derivata terza continua [S]

(2) Dire quali delle seguenti funzioni $\|\cdot\|$ è una norma

(a) $L = \mathbb{R}^3$ e $\|x\| = |x_1| + 2|x_2| + 5|x_3|$ [S]
(b) $L = \mathbb{R}^3$ e $\|x\| = |x_1| + 5|x_3|$ [N]
(c) $L = C_0(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \sup_{x:|x|\leq 3} |f(x)|$ [N]
(d) $L = C^3[a, b]$ e $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ [S]
(e) $L = C^3[a, b]$ e $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ [N]
(f) $L = C^3[a, b]$ e $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$ [S]
(g) $L = C^3[a, b]$ e $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$ [N]
(h) $L = \mathbb{R}^3$ e $\|x\| = |x_1| - 2|x_2| + 5|x_3|$ [N]
(i) $L = \mathbb{R}^3$ e $\|x\| = |x_1| + 5|x_3|^2$ [N]
(j) $L = C_0(\mathbb{R})$ e $\|f\| = |f(1)| + \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ [S]
(k) $L = C_0(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \int_{-1}^{1} |f(x)| \, dx$ [N]
(l) $L = \mathbb{R}^3$ e $\|x\| = |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2$ [N]
(m) $L = \mathbb{R}^3$ e $\|x\| = (12|x_1|^2 + |x_2|^2 + 2|x_3|^2)^{1/2}$ [S]
(n) $L = C_b(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, dx$ [N]
(o) $L = C_b(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{1+x^2} \, dx$ [S]

(3) Per ciascun insieme di vettori dire se sono linearmente indipendenti o dipendenti e dimostrarlo

(1) in $\mathbb{R}^3$ i vettori $u_1 = (1,2,0)$, $u_2 = (2,1,0)$, $u_3 = (0,0,1)$

(2) in $\mathbb{R}^3$ i vettori $u_1 = (1,2,0)$, $u_2 = (2,1,1)$, $u_3 = (1,0,1)$, $u_4 = (1,1,1)$

(3) in $C(\mathbb{R})$ le funzioni $x^2, \sin x, \cos x$

(4) in $C(\mathbb{R})$ le funzioni $1, e^x, e^{2x}, e^{3x}$

(5) in $C(\mathbb{R};\mathbb{C})$ (le funzioni reali continue a valori complessi, considerato come spazio vettoriale complesso) le funzioni $e^{ix}, e^{-ix}, \sin x$

(4) Per quali valori di α le seguenti funzioni appartengono a $C_3(\mathbb{R})$?

$$(a)\ \ f(x) := \frac{1}{(1+x^2)^\alpha} \qquad (b)\ \ f(x) := \frac{x+x^3}{1+\sin^2 x + |x|^\alpha} \qquad (c)\ \ f(x) := \frac{1}{1+e^x+|x|^\alpha}$$

(5) Descrivere a parole i seguenti sottospazi generati (i vettori $e^{(n)}$ sono i soliti vettori di base $e^{(n)} = (0,0,\dots,0,1,0,0,\dots)$ in cui l'unico 1 appare alla posizione n)

(a) In $\mathbb{R}^3$, $\text{span}\{e^{(1)}\}$

(b) In $\mathbb{R}^3$, $\text{span}\{e^{(1)}, e^{(2)}\}$

(c) In $\mathbb{R}^3$, $\text{span}\{e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}\}$

(d) In $\mathbb{R}^3$, $\text{span}\{(1,1,0),(1,-1,0)\}$

(e) In $\mathbb{R}^3$, $\text{span}\{(1,1,0),(1,-1,0),(1,0,0),(0,1,0)\}$

(f) In $\mathbb{R}^\infty$, $\text{span}\{e^{(n)} : n = 1,2,3,4,\dots\}$

(g) In $C(\mathbb{R})$, $\text{span}\{1, x, x^2, x^3\}$

(h) In $C(\mathbb{R})$, $\text{span}\{(x^k)_{k=0}^\infty\}$

2 Spazi di Hilbert

(1) (Legendre polynomials). Using the Gram–Schmidt procedure, find a set of orthonormal functions p_0, p_1, p_2, p_3 in $C_2[-1,1]$, starting from the linearly independent set

$$v_0(x) = 1,\ v_1(x) = x,\ v_2(x) = x^2,\ v_3(x) = x^3,\ v_4(x) = x^4$$

(svolto nelle note).

(2) stesso esercizio nello spazio $C_2[0,1]$

(3) Nello spazio $C_2[0,1]$ decomporre il vettore $v(x) = x^5$ come somma

$$v = w + z$$

in cui $w \in \text{span}\{1, x, x^2\}$ e $z \perp \text{span}\{1, x, x^2\}$ (Sugg: conviene utilizzare il risultato dell'esercizio precedente).

(4) Sia $u := (1,2,3,4) \in \mathbb{R}^4$. Determinare la matrice che rappresenta l'operatore π_u (la proiezione ortogonale su $\text{span}\{u\}$) nella base canonica.

(5) Sia $L = \mathbb{R}^4$ e siano

$$v_1 = (1,1,1,0)$$
$$v_2 = (0,1,1,2)$$
$$W = \text{span}\{v_1, v_2\}$$

Determinare le matrici $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ e A che rappresentano rispettivamente π_{w_1}, π_{w_2}, π_W nella base canonica. Verificare che

$$A^{(1)}A^{(2)} = 0 \qquad A^2 = A$$

(Vedi la soluzione di un problema analogo nelle note).

(6) Sia $L = C_2[0,1]$ e $W = \text{span}\{1, x\}$. Determinare il nucleo dell'operatore π_W, vale a dire determinare $K(x,y)$ tale che

$$(\pi_W f)(x) = \int_0^1 K(x,y)\, f(y)\, dy$$

Verificare che

$$\int_0^1 K(x,y)K(y,z)\, dy = K(x,z)\,.$$

Calcolare $\pi_W x^2$ e verificare che $x^2 - \pi_W(x^2)$ è ortogonale a $\text{span}\{1, x\}$.

(7) Sia $L = C_2[0,1]$ e $W = \text{span}\{x, x^3\}$. Determinare il nucleo integrale dell'operatore π_W, vale a dire determinare $K(x,y)$ tale che

$$(\pi_W f)(x) = \int_0^1 K(x,y)\, f(y)\, dy$$

[R: $K(x,y) = 5/4(15xy - 21x^3y - 21xy^3 + 35(xy)^3)$]

3 Funzionali lineari

(1) Sia $a \in \ell_\infty$ e sia φ_a il funzionale lineare in ℓ_1 dato da

$$\varphi_a(x) := \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \qquad x \in \ell_1 \tag{1}$$

Dimostrare che $\|\varphi_a\| = \|a\|_\infty$. Dimostrare che φ è un isomorfismo di ℓ_∞ *su* ℓ_1^*, vale a dire far vedere che ogni funzionale lineare continuo F su ℓ_1 si può scrivere nella forma (1) (Risolto sulle note).

(2) Calcolare la norma del funzionale lineare δ_x, con $x \in \mathbb{R}$ che agisce sullo spazio normato $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$

(3) Sia $a \in \ell_2$ e sia $\varphi_a : \ell_2 \mapsto \mathbb{R}$ dato da

$$\varphi_a(x) := \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \qquad x \in \ell_2$$

Dimostrare che φ_a è un funzionale lineare continuo in ℓ_2 e che $\|\varphi_a\| = \|a\|_2$.

(4) Data la successione

$$a = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right)$$

determinare la norma del funzionale lineare φ_a, definito come $\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$, quando φ_a agisce

(1) sullo spazio ℓ_1; (2) sullo spazio ℓ_∞; (3) sullo spazio ℓ_3.

Fornire semplicemente la formula utilizzata per la risposta e il valore numerico di $\|\varphi_a\|$, senza dimostrazione.

(5) Nei casi seguenti dire se $F \in L^*$. Nel caso di risposta negativa giustificare la propria affermazione

(a) $L = \mathbb{R}^3$, $F(x) = x_1 + 2x_2 + x_3$ [Sì]
(b) $L = \mathbb{R}^3$, $F(x) = x_1 + 2x_2 - x_3$ [Sì]
(c) $L = \mathbb{R}^3$, $F(x) = x_1 + 2x_2$ [Sì]
(d) $L = \mathbb{R}^3$, $F(x) = |x_1| + 2|x_2| + |x_3|$ [No]
(e) $L = \mathbb{R}^3$, $F(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 + 1$ [No]
(f) $L = \ell_1$, $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ [Sì]
(g) $L = \ell_1$, $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_{5i}$ [Sì]
(h) $L = \ell_1$, $F(x) = \lim_{i\to\infty} x_i$ [Sì]
(i) $L = \ell_1$, $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i\, x_i$ [No]
(j) $L = \ell_\infty$, $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i/i$ [No]
(k) $L = \ell_\infty$, $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i/i^2$ [Sì]
(l) $L = \ell_\infty$, $F(x) = \lim_{i\to\infty} x_i$ [No]
(m) $L = \ell_\infty$, $F(x) = \limsup_{i\to\infty} x_i$ [N]
(n) $L = \ell_0$, $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ [N]
(o) $L = C_1(\mathbb{R})$, $F(f) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx$ [N]
(p) $L = C_1(\mathbb{R})$, $F(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$ [S]
(q) $L = C_1(\mathbb{R})$, $F(f) = \int_{\mathbb{R}} \arctan(x)\, f(x)\, dx$ [S]
(r) $L = C_1(\mathbb{R})$, $F(f) = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx$ [N]
(s) $L = C_1(\mathbb{R})$, $F(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)^2\, dx$ [N]
(t) $L = C_2(\mathbb{R})$, $F(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$ [N]
(u) $L = C_2(\mathbb{R})$, $F(f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x}\, dx$ [N]
(v) $L = C_2(\mathbb{R})$, $F(f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{1+|x|}\, dx$ [S]

(6) Nei casi seguenti dire se F è una distribuzione su $\mathcal{K}$. Nel caso di risposta negativa giustificare la propria affermazione

(a) $F(f) = f(0) + f(1)$ [S]
(b) $F(f) = f(0)\, f(1)$ [N]
(c) $F(f) = 5f(0) + 2f(1)$ [S]
(d) $F(f) = 5f(0) + 2f(1) + 3$ [N]
(e) $F(f) = |f(0)|$ [N]

(f) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} x^4 f(x)$ [S]
(g) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} x^{-1} f(x)$ [N]
(h) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} x^{-1/2} f(x)$ [S]
(i) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} \log|x| f(x)$ [S]
(j) $F(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ [N]
(k) $F(f) = f''(2) - f'(5) + f(0)$ [S]
(l) $F(f) = f''(2) - f'(5) + f(0) + 1$ [N]
(m) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} f(x)\,dx$ [S]
(n) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} (\log|x|)^{100} f(x)\,dx$ [S]
(o) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} (\log|x|)^{100} |f(x)|\,dx$ [N]
(p) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)^2\,dx$ [N]

(7) Dimostrare che $x\delta_0' = -\delta_0$.

(8) Dimostrare che $(\log|x|)' = P(1/x)$, vale a dire, più precisamente che $\varphi'_{\log|x|} = P(1/x)$, in cui $\varphi_{\log|x|}$ è la distribuzione

$$\varphi_{\log|x|}(f) := \int_{\mathbb{R}} \log|x|\, f(x)\,dx$$

(9) Calcolare le derivata (nel senso delle distribuzioni) di

$$\operatorname{sgn}(x)\, e^{-|x|} \qquad \operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(x-1)$$

(Sugg: ricordate il risultato generale che dice che se g è una funzione differenziabile a tratti allora ...).

(10) Sia $h \in C^\infty(\mathbb{R})$. Dimostrare le seguenti identità

$$\begin{aligned} h\delta_0 &= h(0)\delta_0 \\ h\delta_0' &= h(0)\delta_0' - h'(0)\delta_0 \\ h\delta_0'' &= h(0)\delta_0'' - 2h'(0)\delta_0' + h''(0)\delta_0 \end{aligned}$$

Generalizzare:

$$h\delta_0^{(n)} = ?$$

Applicare le formule precedenti per calcolare

$$x^2\delta_0^{(3)} \qquad x^3\delta_0'' \qquad x^2\delta_0'' \qquad e^x\delta_0''$$

(11) Dimostrare che

(a) $x^n\delta_0^{(n)} = (-1)^n n!\,\delta_0$
(b) se $p > n$ allora $x^p\delta_0^{(n)} = 0$.

(12) Calcolare le distribuzioni

$$xP(1/x) \qquad x^2P(1/x) \qquad x(\operatorname{sgn} x)' \qquad x\,(\operatorname{sgn}(x+2))'$$

(13) Sia $f \in \mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$ è lo spazio delle funzioni infinitamente differenziabili su $\mathbb{R}$ a supporto compatto). Calcolare

(1) $(x^{100}\,\delta_0^{(50)})(f)$ (2) $(\sin x\,\delta_0)(f)$ (3) $(x^2\,\delta_5')(f)$
(4) $(\cos x\,\delta_0'')(f)$ (5) $(x\,P(1/x))(f)$

4 Operatori lineari

(1) Sia ϑ_+ (traslazione verso destra) l'operatore lineare su ℓ_1 definito, se $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$ come

$$\vartheta_+ x = \vartheta_+(x_1, x_2, x_3, \dots) := (0, x_1, x_2, x_3, x_4, \dots)$$

Determinare $\|\vartheta_+\|$, $\operatorname{Ker} \vartheta_+$ e $\operatorname{Ran} \vartheta_+$.

(2) Sia ϑ_- (traslazione vesro sinistra) l'operatore lineare su ℓ_1 definito, se $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$ come

$$\vartheta_- := (x_2, x_3, x_4, \dots)$$

Determinare $\|\vartheta_-\|$, $\operatorname{Ker} \vartheta_-$ e $\operatorname{Ran} \vartheta_-$.

(3) Sia K una funzione continua su $[a, b] \times [a, b]$. Sia T l'operatore su $C_2[a, b]$ definito come

$$Tf(x) := \int_a^b K(x, y)\, f(y)\, dy\,.$$

Dimostrare che T è limitato e trovare un limite superiore alla norma di T

(4) Sia $g \in C_b(\mathbb{R})$ fissata e sia T l'operatore lineare su $(C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$ definito come

$$Tf(x) = g(x)f(x)$$

Calcolare $\|T\|$.

(5) Sia $g \in C_b(\mathbb{R})$ fissata e sia T l'operatore lineare su $(C_1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ definito come

$$Tf(x) = g(x)f(x)$$

Calcolare $\|T\|$.

(6) Dimostrare che in ℓ_2 vale $\vartheta_+^* = \vartheta_-$.

(7) Sia $(V, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ uno spazio di Hilbert. Dimostrare che se P è una proiezione ortogonale in V allora,

   (1) $(I - P)v$ è ortogonale a Pv
   (2) $\|Pv\| \le \|v\|$
   (3) $\operatorname{Ran} P = \operatorname{Ker}(I - P)$

(8) In $(C([a, b]; \mathbb{C}), \|\cdot\|_u)$ consideriamo l'operatore

$$(Tf)(x) := x\, f(x)$$

Dimostrare che T non ha autovalori e che $\sigma(T) = [a, b]$.

(9) Sia ϑ_+ l'operatore di traslazione a destra che agisce in $\ell_2(\mathbb{C})$. Dimostrare che

   (1) ϑ_+ non ha autovalori
   (2) $\sigma(\vartheta^+) = B_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$

(10) Sia ϑ_- l'operatore di traslazione a sinistra che agisce in $\ell_2(\mathbb{C})$. Determinare gli autovalori e lo spettro continuo di T.

(11) Sia P una proiezione ortogonale nello spazio di Hilbert V. Dimostrare che $\langle Px, x\rangle \geq 0$ per ogni $x \in V$.

(12) Sia T l'operatore che agisce in ℓ_2 come

$$Tx = \left(0, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}, \frac{x_3}{4}, \dots\right)$$

(a) Determinare $\|T\|$

(b) Trovare gli autovalori e lo spettro continuo di T

(13) Siano P, Q proiezioni ortogonali nello spazio di Hilbert V. Dimostrare che

(a) se $PQ = 0$ allora $QP = 0$

(b) se $PQ = 0$ allora $P + Q$ è una proiezione ortogonale

5 Serie e trasformata di Fourier

(1) Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ le funzioni

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in (0, \pi] \\ -1 & \text{per } x \in [-\pi, 0) \end{cases} \qquad (b) \quad f(x) = |x|.$$

(2) Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione

$$f(x) = \mathrm{e}^x.$$

Suggerimento: utilizzare la forma complessa della serie di Fourier.

(3) Utilizzare il risultato dell'esercizio precedente per dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sinh \pi} - 1\right).$$

(4) Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-1, 1]$ la funzione

$$f(x) = x^2,$$

ed utilizzare il risultato per dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

(5) Per quali valori dell'esponente reale α la funzione $f(x) = |x|^\alpha$ viola la condizione di Dini in $x = 0$?

(6) Dimostrare che la serie di Fourier per la funzione

$$f(x) = \pi^2 - x^2, \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

converge uniformemente a $f(x)$.

(7) Trovare la trasformata di Fourier $\mathcal{F}[f] = g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{e}^{-i\lambda x} dx$ delle seguenti funzioni appartenenti ad $L_2(-\infty, +\infty)$:

$$(i) \;\; f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases} \qquad (ii) \;\; f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } |x| \leq \pi \\ 0 & \text{se } |x| > \pi \end{cases}$$

$$(iii) \;\; f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } |x| \leq \pi/2 \\ 0 & \text{se } |x| > \pi/2 \end{cases} \qquad (iv) \;\; f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } |x| \leq \pi \\ 0 & \text{se } |x| > \pi \end{cases}$$

(8) Trovare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^4 + 1}.$$

[Suggerimento. Utilizzare il teorema dei residui chiudendo il cammino di integrazione nel semipiano inferiore della variabile complessa $z = x + iy$ per $\lambda > 0$, e nel semipiano superiore per $\lambda < 0$].

(9) Siano $f(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ una funzione reale e $g(\lambda) = \mathcal{F}[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \mathrm{e}^{-i\lambda x}$ la sua trasformata di Fourier. Dimostrare che:

(a) $g(-\lambda) = \overline{g(\lambda)}$;

(b) se $f(-x) = f(x)$ (funzione pari) allora $g(-\lambda) = g(\lambda)$, e quindi, per la proprietà (a), $g(\lambda)$ è reale;

(c) se $f(-x) = -f(x)$ (funzione dispari) allora $g(-\lambda) = -g(\lambda)$, e quindi, per la proprietà (a), $g(\lambda)$ è immaginaria pura.